

# Teilvolumen einer Kugel

Autor: ICQ# 167959328

## Aufgabe

Eine Kugel mit dem Radius  $r = 4,5$  m wird mit Wasser  $h = 6,5$  m hoch gefüllt. Wie groß ist dann das Wasservolumen in der Kugel?

## Lösung

### Ansatz

Das Wasser in der Kugel ist ein Rotationskörper, da sein Querschnitt einen Kreis bildet. Das Teilvolumen ließe sich also als Integral berechnen:

$$V = \int_{-r}^{h-r} \pi f(y)^2 dy, \quad f(y)^2 + y^2 = r^2, \quad f(y) \geq 0$$

### Lösung

$$f(y)^2 = r^2 - y^2$$

$$V = \int_{-r}^{h-r} \pi (r^2 - y^2) dy = \pi \left( \int_{-r}^{h-r} r^2 dy - \int_{-r}^{h-r} y^2 dy \right) = \pi \left( [r^2 y]_{-r}^{h-r} - \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{-r}^{h-r} \right)$$

$$\begin{aligned} V &= \pi (r^2 (h-r+r) - \frac{1}{3} ((h-r)^3 - (-r)^3)) \\ &= \pi (r^2 h - \frac{1}{3} (h^3 - 3h^2 r + 3hr^2 - r^3 + r^3)) \\ &= \pi \left( r^2 h - \frac{1}{3} h^3 + h^2 r - hr^2 \right) \end{aligned}$$

Formel:

$$V = \pi \left( rh^2 - \frac{1}{3} h^3 \right)$$

Berechnung:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left( 4,5 \text{ m} \cdot 6,5^2 \text{ m}^2 - \frac{6,5^3 \text{ m}^3}{3} \right) \\ V &= 309,7086757663937834251089268683 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

### Kontrolle

Für  $h=2r$  muß  $V$  das Kugelvolumen sein, also  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

$$V = \pi \left( r \cdot (2r)^2 - \frac{1}{3} (2r)^3 \right) = \pi \left( 4r^3 - \frac{8}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{zeigt, daß diese Bedingung erfüllt ist.}$$

Weiterhin muß das Wasservolumen kleiner als das Kugelvolumen sein. Das Kugelvolumen ist mit  $381,70350741115987847321117106846 \text{ m}^3$  tatsächlich größer als das Wasservolumen.